Random Groups and Property (T)(General and Geometric Topology and Geometric Group Theory)

近藤, 剛史

数理解析研究所講究録
1492巻 2006年 43-47

Random Groups and Property (T)

近藤 剛史
京都大学理学研究科博士課程

ここでの主結果は井関裕靖氏 (東北大学), 納谷信氏 (名古屋大学) との共同研究で得られたものである.

ランダム群の研究のモチベーションは大きく分けて二つあると考えられる. 一つは新しい有限生成群の例を作ることであり, もう一つは有限生成群全体, もしくは有限表示群全体の中で典型的な群はどのような性質を持つのかを調べることである. 前者の研究としては [4] があり, 後者の立場では [3], [8], [10] をはじめ多くの研究がある. 詳しくは Ollivier によるサーベイ [9] 及びその文献表を見られたい.

Żuk は [11] で密度が 1/3 より大きいとき, ランダム群が property (T) を持つことを示した. これは後者に属する結果と思うことができる. 一方, 井関, 納谷によって, 与えられた離散群とその CAT(0) 空間への等長作用に対して, この作用が固定点を持つための十分条件が与えられた [7]. 本稿ではこの定理を少し拡張したものを Żuk の証明の中に組み込むことで, ランダム群が property (T) よりもはるかに強い固定点定理を満たすことを示せたことを報告する.

1 Property (T)

まず property (T) を導入しよう. property (T) はより一般の群に対して定義できるが, ここでは必要ないので有限生成群に対してのみ定義する.

Γ を有限生成群, S をその有限生成系とし, $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ を Γ のユニタリー表現とする. ここで $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素全体の群とする.

ユニタリー表現 π が almost invariant vector を持つとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ベクトル $u_\epsilon \in \mathcal{H}$ が存在して, 任意の $s \in S$ に対して $\|\pi(s)u_\epsilon - u_\epsilon\| < \epsilon\|u_\epsilon\|$ が成り立つときにいう. このとき, property (T) とは次で定義される.

定義 1.1. Γ の almost invariant vector を持つユニタリー表現が常に零ベクトルでない不変ベクトルを持つときに, Γ が property (T) を持つと言う.

次の定理は, property (T) がある種の作用の固定点の言葉で言い換えられることを示している.

定理 1.2 ([1], [5]). 有限生成群 Γ に対して, Γ が property (T) を持つことと, Γ の Hilbert 空間への任意の等長作用が必ず固定点を持つことは同値である.

例 1.3. (1) $SL(n,\mathbb{Z})(n \geq 3)$, より一般に中心が有限で階数 2 以上の単純リー群の格子は property (T) を持つ.
(2) $\mathbb{Z}^n$, より一般に無限 amenable 群は property (T) を持たない.
(3) 自由群 $F_n(n \geq 2)$, 及び $SL(2,\mathbb{Z})$ は property (T) を持たない.

Property (T) に関しては [6] が詳しい.

2 Żuk の結果

実数 $0 < d < 1$ と $c > 1$ を固定する. $\mathcal{P}(m,d)$ を m 個の生成元と, 長さが 3 の関係式からなる密度が d の表示全体の集合とする. ここで密度が d とは, 関係式の数 N が

$$c^{-1}(2m-1)^{3d} \leq N \leq c(2m-1)^{3d}$$

を満たすこととする. つまり $\mathcal{P}(m,d)$ の元 P は $\langle s_1,\ldots,s_m | R_1,\ldots,R_N\rangle$ という形の表示で, R_i はすべて長さが 3 であり, N が上の不等式を満たすものである (ただし, $\mathcal{P}(m,d)$ は表示の集合であって, それが定める群の同型類ではない). $(2m-1)^3$ という数は, 長さが 3 の既約語の全体の個数であるから, その d 乗のオーダーの関係式をとってきていることになる.

$\mathcal{P}(m,d)$ の元 P に対して, この表示が定める群を $\Gamma(P)$ と書くことにする. このとき, Żuk は次を示した.

定理 2.1 ([11]). 密度 d が $d < 1/2$ を満たすとき,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\#\{P \in \mathcal{P}(m,d) | \Gamma(P) \text{ は無限双曲群 }\}}{\#\mathcal{P}(m,d)} = 1.$$

定理 2.2 ([11]). 密度 d が $d > 1/3$ を満たすとき,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\#\{P \in \mathcal{P}(m,d) | \Gamma(P) \text{ は property (T) を持つ }\}}{\#\mathcal{P}(m,d)} = 1.$$

大雑把に Żuk による証明のアイデアを述べる.

まず, 群 Γ が表示 $\langle s_1,\ldots,s_k | R_1,\ldots,R_n,R'_1,\ldots\rangle$ (ただし $R_1,\ldots,R_n$ は長さが 3 の語のみとし, $R'_1,\ldots$ については長さの条件はないものとする) を持つとする. この表示に対してグラフ L を, 頂点集合が $S = \{s_1,s_2,\ldots,s_k,s_1^{-1},s_2^{-1},\ldots,s_k^{-1}\}$ の $2k$ 個からなり, 辺は各生成元 $R = s_x s_y s_z \in \{R_1,\ldots,R_n\}$ に対して, $(s_x^{-1},s_y),(s_y^{-1},s_z),(s_z^{-1},s_x)$ の 3 本を加えたものとして定義する. グラフ L は合計 $3n$ 本の辺をもつグラフである.

このとき, Żuk はもしグラフ L が連結で $\mu_1 > 1/2$ を満たすならば群 Γ が property (T) を満たすことを示した. ここで μ_1 とはグラフ L のラプラシアンの第一固有値のことである. (より正確には, 一番小さい固有値は 0 なのでその次に小さい固有値である.)

次にランダムグラフの結果 [2] を使って, ほとんどのグラフがこの条件を満たすことを示すというのが大体の証明の流れである.

ただし, このグラフ L は一般には multiple edge, self loop を持つので単体複体ではない. このことから, このグラフは群 Γ が作用する単体複体のリンクとしては現れ得ないものであり, [7] の固定点定理をそのまま適用してその系とみなすことはできない.

3 ランダム群の固定点定理

この章では, 我々の結果を述べるためまず CAT(0) 空間の不変量である δ の定義を与え, それを用いて, ランダム群の結果がより強い固定点定理にできるという我々の結果を紹介する.

定義 3.1 ([7]). Y を CAT(0) 空間とする. このとき,

$$\delta(Y) = \sup_{\mu} \inf_{\phi} \frac{\| \int_Y \phi d\mu \|^2}{\int_Y \|\phi\|^2 d\mu}$$

と定義する. ここで μ は Y 上の確率測度で有限個の点にのみ台を持つもの全体を動き, ϕ は, $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間としたとき, 1-Lipschitz 写像 $\phi : Supp(\mu) \to \mathcal{H}$ であって, 任意の $y \in Supp(\mu)$ に対して $\|\phi(y)\| = dist_Y(y, bar(\mu))$ を満たすもの全体に亙ってとるものとする. ただし $bar(\mu)$ とは測度 μ の重心のこととする.

定義から即座に $\delta \in [0,1]$ が分かる. この不変量 δ は, イメージとしては CAT(0) 空間における重心とユークリッド空間における重心との差のようなものであるが, 計算することが非常に難しく, 0 であることが分かっているものを除いては評価があるのみである [7].

例 3.2. (1) Y を Hadamard 多様体, Hilbert 空間, tree のいずれかとすると, $\delta(Y) = 0$ となる.

(2) Y を building $PSL(3, \mathbb{Q}_p)/PSL(3, \mathbb{Z}_p)$ とすると,

$$\delta(Y) \geq \frac{(\sqrt{p}-1)^2}{2(p-\sqrt{p}+1)}.$$

$p = 2$ のときは $\delta(Y) \leq 0.4122\cdots$.

ここで $\mathcal{Y}_{\delta_0}$ は $\delta(Y) \leq \delta_0$ を満たす CAT(0) 空間全体の族を表すとする. 我々は [7] の結果を拡張することで, 次の結果を得た.

定理 3.3. $\Gamma = \langle s_1, \ldots, s_k | R_1, \ldots, R_n, R_1', R_2', \ldots \rangle$ (ただし, $R_1, \ldots, R_n$ は長さが 3 の語からなる) とする. もしグラフ L(Żuk の証明で使われたもの) が連結で, $\mu_1 > \alpha \geq 1/2$ を満たすならば, $\delta_0 = 1 - 1/2\alpha$ に対して, 群 Γ の任意の $Y \in \mathcal{Y}_{\delta_0}$ への等長作用は固定点を持つ.

この定理から, Żuk の議論と全く同様にランダムグラフの結果を用いることで次の定理が得られる.

定理 3.4. $\delta_0 < 1/2$ とする. 密度 d が $d > 1/3$ を満たすとき,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\#\{P \in \mathcal{P}(m,d) | \Gamma(P) \text{ の任意の } Y \in \mathcal{Y}_{\delta_0} \text{ への等長作用は固定点を持つ}\}}{\#\mathcal{P}(m,d)} = 1.$$

Hilbert 空間は $\delta = 0$ を満たす CAT(0) 空間なので, この定理はŻuk の定理を真に含んでいる. また上で述べた δ の計算は, ランダム群は Hadamard 多様体や building $PSL(3,\mathbb{Q}_2)/PSL(3,\mathbb{Z}_2)$ への等長作用に対しても固定点を持つことを示しているので, はるかに強い固定点定理を満たしていることになる.

参考文献

[1] P. Delorme, 1-*cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations*, Bull. Soc. Math. France 105 (1977), 281–336.

[2] J.Friedman, *On the second eigenvalue and random walks in random d -regular graphs*, Combinatorica 11:4 (1991), 331-362.

[3] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, LMS Lect.Notes 182, Cambridge Univ. Press, (1993).

[4] M. Gromov, *Random Walk in Random Groups*, GAFA, Geom. func. anal. 13 (2003), No.1, 73-146.

[5] A. Guichardet *Sur la cohomologie des groupes topologiques. II.*, Bull. Sci. Math. (2) 96 (1972), 305–332.

[6] de la Harpe, Pierre; Valette, Alain *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger)*, Astérisque No. 175 (1989).

[7] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial Harmonic Maps and Discrete-group Actions on Hadamard Spaces* Geometriae Dedicata 114, 147-188, (2005).

[8] Y. Ollivier, *Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups*, Geom. Funct. Anal. 14 (2004), 595–679.

[9] Y. Ollivier, *A January 2005 invitation to random groups*, available at http://www.umpa.ens-lyon.fr/~yollivie/publs.html

[10] Ol' shanskiĭ, A. Yu., *Almost every group is hyperbolic*, Internat. J. Algebra Comput. 2 (1992), 1–17.

[11] A. Żuk, *Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups*, Geom. Funct. Anal. 13 (2003), 643-670.